เซตบนวางนัยทั่วไปและส่วนขั้ววางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BEเทียม

On Generalized Upper Sets and Generalized Terminal Sections in Pseudo BE- Algebras

อรรถพล ภูมิลา* นุชรัตน์ พัฒนะโชติ และสุนิดา อ้นโม

Attaphol Pumila*, Nucharat Phattanachot and Sunida Onmo

หลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University

Received : 7 May 2018

Accepted : 8 August 2018

Published online : 10 September 2018

บทคัดย่อ

จุดมุ่งหมายของการศึกษาในครั้งนี้คือการให้นิยามและหาสมบัติของเซตบนวางนัยทั่วไปและส่วนขั้ววางนัยทั่วไปในพีชคณิต- BEเทียม จากนิยามของส่วนขั้ววางนัยทั่วไปสามารถหาความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับเซตบนวางนัยทั่วไป และตัวกรองเทียมในพีชคณิต-BEเทียม อีกทั้งยังได้สมบัติที่เกี่ยวข้องกับตัวกรองเทียมและพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง

คำสำคัญ : พีชคณิต- BEเทียม, เซตบนวางนัยทั่วไป, ส่วนขั้ววางนัยทั่วไป, แจกแจง, ตัวกรองเทียม

Abstract

The aim of this paper is to introduce the notions of generalized upper sets and generalized terminal sections in pseudo BE-algebras. Next, their properties are investigate. Furthermore, these sets are considered in distributive pseudo BE-algebras. Finally, we provide the relationship between distributive pseudo BE-algebras and pseudo filter.

Keywords : pseudo BE-algebra, generalized upper set, generalized terminal section, distributive, pseudo filter

***Corresponding author. E-mail** : atpa@psru.ac.th

บทนำ

งานวิจัยเรื่อง ไอดีลและเซตบนในพีชคณิต-BE (Ahn & So, 2008) ได้ให้นิยามไอดีลและเซตบนในพีชคณิต-BE และให้แนวคิดว่า เซตบนของสมาชิกใด ๆ ในพีชคณิต-BE จะเป็นไอดีลของพีชคณิต-BE งานวิจัยเรื่อง เซตบนวางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BE (Ahn & So, 2009) ได้ให้สมบัติเฉพาะของเซตบนวางนัยทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับไอดีลในพีชคณิต-BE แจกแจงในตัว ต่อมางานวิจัยเรื่อง ตัวกรองในพีชคณิต-BEสลับที่ (Ahn , Kim, & Ko , 2012) ได้ให้นิยามส่วนขั้วของสมาชิกที่อยู่ในพีชคณิต-BEและได้สมบัติบางประการของส่วนขั้วของสมาชิกที่อยู่ในพีชคณิต-BE

งานวิจัยเรื่อง พีชคณิต-BEเทียม (Borzooei *et al.*, 2013) ให้นิยาม เซตบน ส่วนขั้ว และตัวกรองเทียมของสมาชิกที่อยู่ในพีชคณิต-BEเทียม และสมบัติบางประการของเซตบน ส่วนขั้ว และตัวกรองเทียมของสมาชิกที่อยู่ในพีชคณิต-BEเทียม งานวิจัยเรื่อง พีชคณิต-BEเทียมแจกแจง (Borzooei *et al.,* 2015) ให้นิยามของแจกแจงในพีชคณิต-BEเทียม ต่อมา งานวิจัยเรื่อง เซตบนวางนัยทั่วไปและส่วนขั้ววางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BE (Attaphol *et al.,* 2017) ให้นิยามและสมบัติบางประการของส่วนขั้ววางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BE อีกทั้งยังได้ความสัมพันธ์ที่เกี่ยวของกับเซตบนวางนัยทั่วไป ตัวกรอง และไอดีลในพีชคณิต-BEและในพีชคณิต-BEแจกแจงในตัว

ในการศึกษานี้จะนิยามเซตบนวางนัยทั่วไปและส่วนขั้ววางนัยทั่วไปในพีชคณิต-BEเทียม และแสดงความสัมพันธ์ของเซตบนวางนัยทั่วไป ส่วนขั้ววางนัยทั่วไป และตัวกรองเทียมในพีชคณิต-BEเทียม และในพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง

ความรู้พื้นฐาน (Preliminary)

บทนิยาม 2.1 ให้ X เป็นเซตไม่ว่าง “$*$” เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และ $1 \in X$ จะเรียกโครงสร้าง $(X;*,1)$ ว่า พีชคณิต-BE (Kim & Kim, 2006) ถ้าการดำเนินการทวิภาค “$*$” สอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(BE1) $x * x = 1$

(BE2) $x * 1 = 1$

(BE3) $1 * x = x$

(BE4) $x * (y * z) = y * (x * z)$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

บทนิยาม 2.2 ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE แล้ว $x \le y$ ก็ต่อเมื่อ $x * y = 1$ สำหรับทุก $x, y \in X$ (Ahn, Kim & Ko, 2012)

บทนิยาม 2.3 ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE สำหรับทุก $x,y \in X$ กำหนดให้ $A(x,y) := \{z \in X \mid x*(y*z)=1\}$ จะเรียก $A(x,y)$ ว่า เซตบนของ x และ y (Kim & Kim, 2006)

บทนิยาม 2.4 ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE สำหรับทุก $x,y \in X$ กำหนดให้ $A(x) := \{z \in X \mid x*z=1\}$ จะเรียก $A(x)$ ว่า ส่วนขั้วของ x (Ahn, Kim & Ko, 2012)

ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE และ $u,v \in X$ กำหนดให้ $u^n * v = \underbrace{u*(u*(u*\cdots*(u}_{n\ terms}*v)\cdots)$

บทนิยาม 2.5 ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE สำหรับทุก $x,y \in X$ และ $n \in N$ เมื่อ N คือเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $A_n(x,y) := \{z \in X \mid x^n*(y*z)=1\}$ จะเรียก $A_n(x,y)$ ว่า เซตบนวางนัยทั่วไปของ x และ y (Ahn & So, 2009)

บทนิยาม 2.6 ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE สำหรับทุก $x \in X$ และ $n \in N$ เมื่อ N คือเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $A_n(x) := \{z \in X \mid x^n*z=1\}$ จะเรียก $A_n(x)$ ว่า ส่วนขั้ววางนัยทั่วไปของ x (Attaphol *et al*., 2017)

บทนิยาม 2.7 ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE และ F เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ X แล้ว F เป็นตัวกรองของ X (Ahn, Kim & Ko, 2012) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับทุก $x,y \in X$

(F1) $1 \in F$

(F2) ถ้า $x \in F$ และ $x*y \in F$ แล้ว $y \in F$

บทนิยาม 2.8 ให้ $(X;*,1)$ เป็นพีชคณิต-BE จะเรียก $(X;*,1)$ ว่า พีชคณิต-BEแจกแจงในตัว (Kim & Kim, 2006) ถ้า $x*(y*z)=(x*y)*(x*z)$ สำหรับทุก $x,y,z \in X$

ผลการวิจัย

บทนิยาม 3.1 ให้ X เป็นเซตไม่ว่าง "$*$" และ "$\circ$" เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และ $1 \in X$ จะเรียก $(X;*,\circ,1)$ ว่า พีชคณิต-BEเทียม (Borzooei *et al*., 2013) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้ สำหรับทุก $x,y,z \in X$

(pBE1) $x*x=1$ และ $x \circ x = 1$

(pBE2) $x*1=1$ และ $x \circ 1 = 1$

(pBE3) $1*x=x$ และ $1 \circ x = x$

(pBE4) $x * (y \circ z) = y \circ (x * z)$

(pBE5) $x * y = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x \circ y = 1$

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกให้ X แทน $(X;*,\circ,1)$ จนกว่าจะกำหนดให้เป็นอย่างอื่น

ตัวอย่าง 3.2 ให้ $X = \{1, a, b, c\}$ ซึ่งมี “$*$ ” และ “$\circ$ ” เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	1	b
b	1	a	1	c
c	1	1	1	1

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	1	a
b	1	a	1	a
c	1	1	1	1

จะเห็นได้ว่า $(X;*,\circ,1)$ เป็นพีชคณิต-BEเทียม แต่ $(X;*,1)$ ไม่เป็น พีชคณิต-BE เนื่องจาก $a * (b * c) = a * c = b$

$\neq b * (a * c) = b * b = 1$

บทนิยาม 3.3 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแล้ว $x \leq y \Leftrightarrow x * y = 1 \Leftrightarrow x \circ y = 1$ สำหรับทุก $x, y \in X$

(Borzooei *et al*., 2013)

บทนิยาม 3.4 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม สำหรับทุก $x, y \in X$ กำหนดให้ $A(x, y) := \{z \in X \mid x * (y \circ z) = 1\}$ จะเรียก

$A(x, y)$ ว่า เซตบนของ x และ y (Borzooei *et al*., 2013)

บทนิยาม 3.5 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม สำหรับทุก $x, y \in X$ กำหนดให้ $A(x) := \{z \in X \mid x * z = 1\}$

จะเรียก $A(x)$ ว่า ส่วนขั้วของ x (Borzooei *et al*., 2013)

ให้ $(X;*,\circ,1)$ เป็นพีชคณิต-BEเทียม และ $u, v \in X$ กำหนดให้ $u^n * v = \underbrace{u * (u * (u * \cdots * (u}_{n\ terms} * v) \cdots)$

บทนิยาม 3.6 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $n \in N$ เมื่อ N คือเซตของจำนวนนับ กำหนดให้

$A_n(x, y) := \{z \in X \mid x^n * (y \circ z) = 1\}$ จะเรียก $A_n(x, y)$ ว่า เซตบนวางนัยทั่วไป ของ x และ y

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.6 จะได้ว่า $1, x, y \in A_n(x, y)$

บทนิยาม 3.7 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $n \in N$ เมื่อ N คือเซตของจำนวนนับ กำหนดให้

$A_n(x) := \{z \in X \mid x^n * z = 1\}$ จะเรียก $A_n(x)$ ว่า ส่วนขั้ววางนัยทั่วไป ของ x และ y

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.7 จะได้ว่า $1, x, y \in A_n(x)$

ตัวอย่าง 3.8 ให้ $X = \{1, a, b, c\}$ ซึ่งมี "$*$" และ "$\circ$" เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	c	1
b	1	1	1	1
c	1	a	b	1

$\circ$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	1
b	1	1	1	1
c	1	a	a	1

จะเห็นได้ว่า $(X;*,\circ,1)$ เป็นพีชคณิต-BEเทียม พิจารณา $A(a) = \{1, a, c\} \neq \{1, a, b, c\} = A(a, b)$,

$A_n(a) = \{1, c\} \neq \{1, a, b, c\} = A_n(a, c)$, $A(a, c) = \{1, a, c\} \neq \{1, a, b, c\} = A_n(a, c)$, $A(a) = \{1, a, c\} \neq \{1, a, b, c\} = A_n(a)$

ดังนั้น $A(x) \neq A(x, y)$, $A_n(x) \neq A_n(x, y)$, $A(x, y) \neq A_n(x, y)$ และ $A(x) \neq A_n(x)$

ข้อสังเกต ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม และ $x, y \in X$ ถ้า $z \in A(x, y)$ จะได้ว่า $x * (y \circ z) = 1$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
x^n * (y \circ z) &= x * (x * (x * \cdots * (x * (x * (y \circ z))\cdots)) \\
&= x * (x * (x * \cdots * (x * 1)\cdots)) \\
&\vdots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า $z \in A_n(x, y)$ ดังนั้น $A(x, y) \subseteq A_n(x, y)$ และ $A(x) \subseteq A_n(x)$

บทตั้ง 3.9 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมและ $n \in N$ ถ้า $x, y \in X$ แล้ว $A_n(x) \subseteq A_n(x, y)$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in X$ และ $z \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * z = 1$ ทำให้ได้ว่า $x^n * (y \circ z) = y \circ (x^n * z) = y \circ 1 = 1$

นั่นคือ $z \in A_n(x, y)$ ดังนั้น $A_n(x) \subseteq A_n(x, y)$ □

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมและ $n \in N$ ถ้า $x, y \in X$ แล้ว $A_n(x) = \bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in X$ จากบทตั้ง 3.9 จะได้ว่า $A_n(x) \subseteq A_n(x, y)$ นั่นคือ $A_n(x) \subseteq \bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y)$

ให้ $w \in \bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y)$ จะได้ว่า $w \in A_n(x, y)$ สำหรับ $x, y \in X$ ดังนั้น $w \in A_n(x, 1)$ จะได้ $1 = x^n * (1 \circ w) = x^n * w$

ทำให้ได้ว่า $w \in A_n(x)$ นั่นคือ $\bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y) \subseteq A_n(x)$ ดังนั้น $A_n(x) = \bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y)$ □

บทแทรก 3.11 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมและ $n \in N$ ถ้า $x, y \in X$ แล้ว $A_n(x, 1) = A_n(x) = \bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in X$ พิจารณา

$$\begin{aligned} A_n(x,1) &= \{z \in X \mid x^n * (1 \circ z) = 1\} \\ &= \{z \in X \mid x^n * z = 1\} \\ &= A_n(x) \end{aligned}$$

นั่นคือ $A_n(x, 1) = A_n(x)$ จากทฤษฎีบท 3.10 จะได้ว่า $A_n(x) = \bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y)$ ดังนั้น $A_n(x, 1) = \bigcap_{x,y \in X} A_n(x, y)$ □

ทฤษฎีบท 3.12 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม และ $a \in X$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $n \in N$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(i) $a^n \leq x$

(ii) $X = A_n(a, x)$

(iii) $X = A_n(a)$

พิสูจน์ ให้ $a, x \in X$ (i)$\Rightarrow$ (ii) จาก $a^n \leq x$ จะได้ $x \in A_n(a)$ จะได้ว่า $X \subseteq A_n(a) \subseteq A_n(a, x) \subseteq X$ ดังนั้น $X = A_n(a, x)$

(ii)$\Rightarrow$ (iii) จาก $X = A_n(a, x)$ ให้ $x = 1$ จะได้ $X = A_n(a, 1) = A_n(a)$ ดังนั้น $X = A_n(a)$

(iii)$\Rightarrow$ (i) จาก $X = A_n(a)$ และ $x \in X$ จะได้ $a^n * x = 1$ ดังนั้น $a^n \leq x$ □

บทนิยาม 3.13 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม และ F เป็นเซตย่อยที่เป็นเซตไม่ว่างของ X แล้ว F เป็นตัวกรองเทียม ของ X (Borzooei *et al.*, 2013) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(pF1) $1 \in F$

(pF2) ถ้า $x \in F$ และ $x * y \in F$ แล้ว $y \in F$

สำหรับทุก $x, y \in X$

ตัวอย่าง 3.14 จากตัวอย่าง 3.8 จะเห็นได้ว่า $F_1 = \{1, a, c\}$ และ $F_2 = \{1, b, c\}$ เป็นตัวกรองเทียมของ X

ประพจน์ 3.15 ให้ $F \subseteq X$ และ $1 \in F$ แล้ว F เป็นตัวกรองเทียม ก็ต่อเมื่อ $x \in F$ และ $x \circ y \in F$ แล้ว $y \in F$ สำหรับทุก $x, y \in X$ (Borzooei *et al.*, 2013)

ทฤษฎีบท 3.16 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม ถ้า $A_n(x,1)$ เป็นตัวกรองเทียมของ X และ $y \in A_n(x,1)$ แล้ว $A_n(x, y) \subseteq A_n(x,1)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $n \in N$

พิสูจน์ ให้ $z \in A_n(x, y)$ จะได้ว่า $x^n * (y \circ z) = 1$ ทำให้ได้ว่า $x^n * (1 * (y \circ z)) = 1$

นั่นคือ $y \circ z \in A_n(x,1)$ และเนื่องจาก $A_n(x,1)$ เป็นตัวกรองเทียม และ $y \in A_n(x,1)$ โดยประพจน์ 3.15 จะได้ว่า $z \in A_n(x,1)$ ดังนั้น $A_n(x, y) \subseteq A_n(x,1)$ □

บทแทรก 3.17 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมและ $n \in N$ ถ้า $A_n(x,1)$ เป็นตัวกรองเทียมของ X และ $y \in A_n(x,1)$ แล้ว $A_n(x, y) = A_n(x,1)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 3.18 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม และ F เป็นเซตย่อยที่เป็นเซตไม่ว่างของ X แล้ว F เป็นตัวกรองเทียมของ X ก็ต่อเมื่อ $A_n(x, y) \subseteq F$ สำหรับทุก $x, y \in F$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $z \in A_n(x, y)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และ $n \in N$ จะได้ $x^n * (y \circ z) = 1 \in F$

นั่นคือ $x * (x * (x * \cdots * (x * (y \circ z) \cdots) \in F$

เนื่องจาก F เป็นตัวกรองเทียมของ X และ $x \in F$ ได้ว่า $x * (x * \cdots * (x * (y \circ z) \cdots) \in F$ ทำดังข้างต้น n ครั้ง

จะได้ว่า $y \circ z \in F$ และเนื่องจาก $y \in F$ โดยประพจน์ 3.15 จะได้ว่า $z \in F$ ดังนั้น $A_n(x, y) \subseteq F$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $A_n(x, y) \subseteq F$ เนื่องจาก $1 \in A_n(x, y) \subseteq F$ นั่นคือ $1 \in F$ ให้ $a, a * b \in F$ พิจารณา $1 = (a * b) \circ (a * b) = a * ((a * b) \circ b)$ ทำให้ได้ว่า $b \in A(a, a * b) \subseteq A_n(a, a * b) \subseteq F$ นั่นคือ $b \in F$

ดังนั้น F ตัวกรองเทียมของ X □

ทฤษฎีบท 3.19 ถ้า F เป็นตัวกรองเทียมของ X และ $n \in N$ แล้ว $F = \bigcup_{x,y \in F} A_n(x,y)$ สำหรับทุก $x, y \in F$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นตัวกรองเทียมของ X จะแสดงว่า $F = \bigcup_{x,y \in F} A_n(x,y)$

ให้ $z \in F$ เนื่องจาก $z^n * (1 \circ z) = z^n * z = 1$ จะได้ว่า $z \in A_n(z,1)$ ดังนั้น $F \subseteq A_n(z,1) \subseteq \bigcup_{z \in F} A_n(z,1) \subseteq \bigcup_{x,y \in F} A_n(x,y)$

และให้ $z \in \bigcup_{x,y \in F} A_n(x,y)$ จะมีบาง $a, b \in F$ ซึ่ง $z \in A_n(a,b)$ โดยทฤษฎี 3.18 จะได้ว่า $z \in F$

นั่นคือ $\bigcup_{x,y \in F} A_n(x,y) \subseteq F$ □

ทฤษฎีบท 3.20 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม และ F เป็นเซตย่อยที่เป็นเซตไม่ว่างของ X ถ้า F เป็นตัวกรองเทียมของ X แล้ว $A_n(x) \subseteq F$ สำหรับทุก $x, y \in F$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นเซตย่อยที่เป็นเซตไม่ว่างของ X และ F เป็นตัวกรองเทียมของ X จะแสดงว่า $A_n(x) \subseteq F$

ให้ $z \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * z = 1$ นั่นคือ $x * (x * (x * \cdots * (x * z)\cdots) = 1 \in F$ เนื่องจาก F เป็นตัวกรองเทียมของ X และ $x \in F$ จะได้ว่า $x * (x * \cdots * (x * z)\cdots) = 1 \in F$ ทำดังข้างต้น n ครั้ง จะได้ว่า $z \in F$ ดังนั้น $A_n(x) \subseteq F$ □

บทแทรก 3.21 ถ้า F เป็นตัวกรองเทียมของ X และ $n \in N$ แล้ว $F = \bigcup_{x \in F} A_n(x,1)$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นตัวกรองเทียมของ X จะแสดงว่า $F = \bigcup_{x \in F} A_n(x,1)$

ให้ $z \in F$ เนื่องจาก $z^n * (1 \circ z) = z^n * z = 1$ จะได้ว่า $z \in A_n(z,1) \subseteq \bigcup_{x \in F} A_n(x,1)$ ดังนั้น $F \subseteq \bigcup_{x \in F} A_n(x,1)$

และให้ $z \in \bigcup_{x \in F} A_n(x,1)$ แล้วจะมี $a \in F$ ซึ่ง $z \in A_n(a,1)$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
a^n * (1 \circ z) &= a^n * z \\
&= a * (a * (a * \cdots * (a * z)\cdots) \\
&= 1 \in F
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก F เป็นตัวกรองเทียมและ $a \in F$ จะได้ว่า $a * (a * \cdots * (a * z)\cdots) \in F$ ทำดังข้างต้นไป n ครั้ง จะได้ว่า $z \in F$

นั่นคือ $\bigcup_{x \in F} A_n(x,1) \subseteq F$ ดังนั้น $F = \bigcup_{x \in F} A_n(x,1)$ □

ทฤษฎีบท 3.22 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียม และ F เป็นเซตย่อยที่เป็นเซตไม่ว่างของ X ถ้า F เป็นตัวกรองเทียมของ X แล้ว $F = \bigcup_{x \in F} A_n(x)$ สำหรับทุก $x, y \in F$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ F เป็นตัวกรองเทียมของ X จะแสดงว่า $F = \bigcup_{x \in F} A_n(x)$ ให้ $z \in F$ เนื่องจาก $z^n * z = 1$ นั่นคือ $z \in A_n(z)$ เนื่องจาก $A_n(z) \subseteq \bigcup_{x \in F} A_n(x)$ ได้ว่า $z \in \bigcup_{x \in F} A_n(x)$ นั่นคือ $F \subseteq \bigcup_{x \in F} A_n(x)$ จากทฤษฎีบท 3.20 จะได้ว่า $A_n(x) \subseteq F$ เพราะฉะนั้น $\bigcup_{x \in F} A_n(x) \subseteq F$ ดังนั้น $F = \bigcup_{x \in F} A_n(x)$ □

บทนิยาม 3.23 พีชคณิต-BEเทียม X จะเรียกว่า พีชคณิต-BEเทียมแจกแจง (Borzooei *et al.,* 2015) ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้

(i) $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

(ii) $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่าง 3.24 ให้ $X = \{1, a, b, c, d\}$ การดำเนินการทวิภาคบน X " $*$ "และ " $\circ$ " เป็น ดังตารางต่อไปนี้

$*, \circ$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	1	1	b	c	d
b	1	1	1	b	c
c	1	a	1	1	b
d	1	a	1	1	1

จะเห็นได้ว่า $(X; *, \circ, 1)$ เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง

ทฤษฎีบท 3.25 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง แล้ว $a * b \in A(x, y)$ ก็ต่อเมื่อ $a \circ b \in A(x, y)$ สำหรับทุก $a, b, x, y \in X$ (Borzooei *et al.,* 2015)

ทฤษฎีบท 3.26 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง แล้ว $a * b \in A_n(x, y)$ ก็ต่อเมื่อ $a \circ b \in A_n(x, y)$ สำหรับทุก $a, b, x, y \in X$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $a*b \in A_n(x,y)$ จะแสดงว่า $a \circ b \in A_n(x,y)$ ให้ $a,b,x,y \in X$ จาก $a*b \in A_n(x,y)$ จะได้ว่า $x^n*(y\circ(a*b))=1$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
1 &= x*(x*(x*\cdots*(x*(y\circ(a*b)))\cdots) \\
&= x\circ(x*(x*\cdots*(x*(y\circ(a*b)))\cdots) \\
&= (x\circ x)*(x\circ(x*\cdots*(x*(y\circ(a*b)))\cdots) \\
&= 1*(x\circ(x*\cdots*(x*(y\circ(a*b)))\cdots) \\
&= x\circ(x*\cdots*(x*(y\circ(a*b)))\cdots) \\
&\vdots \\
&= x*(y\circ(a*b))
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $a*b \in A(x,y)$ โดยทฤษฎีบท 3.25 จะได้ว่า $a\circ b \in A(x,y)$ เนื่องจาก $A(x,y) \subseteq A_n(x,y)$ ดังนั้น $a\circ b \in A_n(x,y)$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $a\circ b \in A_n(x,y)$ จะแสดงว่า $a*b \in A_n(x,y)$ จาก $a\circ b \in A_n(x,y)$ จะได้ว่า $x^n*(y\circ(a\circ b))=1$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
1 &= x*(x*(x*\cdots*(x*(y\circ(a\circ b)))\cdots) \\
&= x\circ(x*(x*\cdots*(x*(y\circ(a\circ b)))\cdots) \\
&= (x\circ x)*(x\circ(x*\cdots*(x*(y\circ(a\circ b)))\cdots) \\
&= 1*(x\circ(x*\cdots*(x*(y\circ(a\circ b)))\cdots) \\
&= x\circ(x*\cdots*(x*(y\circ(a\circ b)))\cdots) \\
&\vdots \\
&= x*(y\circ(a\circ b))
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $a\circ b \in A(x,y)$ โดยทฤษฎีบท 3.25 จะได้ว่า $a*b \in A(x,y)$ เนื่องจาก $A(x,y) \subseteq A_n(x,y)$ ดังนั้น $a*b \in A_n(x,y)$ □

ประพจน์ 3.27 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง และ $B = \{z \in X \mid y \circ z \in A_n(x)\}$ แล้ว $A_n(x, y) = B$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $B = \{z \in X \mid y \circ z \in A_n(x)\}$ จะแสดงว่า $A_n(x, y) = B$ ให้ $z \in A_n(x, y)$ จะได้ $x^n * (y \circ z) = 1$ ทำให้ได้ว่า $y \circ z \in A_n(x)$ นั่นคือ $A_n(x, y) \subseteq B$ และให้ $z' \in X$ โดยที่ $y \circ z' \in A_n(x)$ จะได้ $x^n * (y \circ z') = 1$ ทำให้ได้ว่า $z' \in A_n(x, y)$ นั่นคือ $B \subseteq A_n(x, y)$ ดังนั้น $A_n(x, y) = B$ □

ทฤษฎีบท 3.28 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง จะได้ $y \in A_n(x)$ ก็ต่อเมื่อ $A_n(x) = A_n(x, y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $y \in A_n(x)$ จะแสดงว่า $A_n(x) = A_n(x, y)$ ให้ $x, y \in X$ จาก $y \in A_n(x)$ จะได้ $x^n * y = 1$ และให้ $b \in A_n(x, y)$ ทำให้ได้ว่า $x^n * (y \circ b) = 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned} x^n * b &= 1 \circ (x^n * b) \\ &= (x^n * y) \circ (x^n * b) \\ &= x^n * (y \circ b) \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $b \in A_n(x)$ นั่นคือ $A_n(x, y) \subseteq A_n(x)$ และจากบทตั้ง 3.9 จะได้ $A_n(x) \subseteq A_n(x, y)$ ดังนั้น $A_n(x) = A_n(x, y)$ ในทางกลับกัน สมมติให้ $A_n(x) = A_n(x, y)$ จะแสดงว่า $y \in A_n(x)$ เนื่องจาก $x^n * (y \circ y) = x^n * 1 = 1$ จะได้ว่า $y \in A_n(x, y)$ ดังนั้น $y \in A_n(x)$ □

ทฤษฎีบท 3.29 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง จะได้ว่า $x^n \leq y^n$ ก็ต่อเมื่อ $A_n(y) \subseteq A_n(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $x^n \leq y^n$ จะแสดงว่า $A_n(y) \subseteq A_n(x)$ จาก $x^n \leq y^n$ จะได้ $x^n * y^n = 1$ และให้ $a \in A_n(y)$ จะได้ $y^n * a = 1$ ทำให้ได้ว่า $y^n \circ a = 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned} x^n * a &= 1 \circ (x^n * a) \\ &= (x^n * y^n) \circ (x^n * a) \end{aligned}$$

$= x^n * (y^n \circ a)$

$= x^n * 1$

$= 1$

นั่นคือ $a \in A_n(x)$ ดังนั้น $A_n(y) \subseteq A_n(x)$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $A_n(y) \subseteq A_n(x)$ จะแสดงว่า $x^n \leq y^n$ เนื่องจาก $x^n * y^n = 1$ จะได้ $y^n \in A_n(y) \subseteq A_n(x)$ ทำให้ได้ว่า $y^n \in A_n(x)$ นั่นคือ $x^n * y^n = 1$ ดังนั้น $y^n \leq x^n$ □

ทฤษฎีบท 3.30 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจง จะได้ว่า $x^n \leq y^n$ และ $y^n \leq x^n$ ก็ต่อเมื่อ $A_n(x) = A_n(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ และ $n \in N$

พิสูจน์ สมมติให้ $x^n \leq y^n$ และ $y^n \leq x^n$ จะแสดงว่า $A_n(x) = A_n(y)$ จาก $x^n \leq y^n$ และ $y^n \leq x^n$ โดยทฤษฎี 3.29 จะได้ว่า $A_n(y) \subseteq A_n(x)$ และ $A_n(x) \subseteq A_n(y)$ ดังนั้น $A_n(x) = A_n(y)$ ในทางกลับกัน สมมติให้ $A_n(x) = A_n(y)$ จะแสดงว่า $x^n \leq y^n$ และ $y^n \leq x^n$ เนื่องจาก $A_n(x) = A_n(y)$ นั่นคือ $A_n(x) \subseteq A_n(y)$ และ $A_n(y) \subseteq A_n(x)$ โดยทฤษฎี 3.29 จะได้ว่า $y^n \leq x^n$ และ $x^n \leq y^n$ □

ทฤษฎีบท 3.31 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจงและ $n \in N$ ถ้า $z \in A_n(x)$ แล้ว $y * z \in A_n(x)$ และ $y \circ z \in A_n(x)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

พิสูจน์ สมมติให้ $z \in A_n(x)$ จะแสดงว่า $y * z \in A_n(x)$ และ $y \circ z \in A_n(x)$

ให้ $x, y, z \in X$ จาก $z \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * z = x^n \circ z = 1$ พิจารณา $x^n * (y \circ z) = y \circ (x^n * z) = y \circ 1 = 1$

นั่นคือ $y \circ z \in A_n(x)$ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $y * z \in A_n(x)$ □

ทฤษฎีบท 3.32 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจงที่ $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ ถ้า $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ แล้ว $y * z \in A_n(x)$ ก็ต่อเมื่อ $y \circ z \in A_n(x)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ และ $n \in N$

พิสูจน์ ให้ $x, y, z \in X$ สมมติให้ $y * z \in A_n(x)$ จะแสดงว่า $y \circ z \in A_n(x)$

พิจารณา $y \circ (y * z) = (y \circ y) * (y \circ z) = 1 * (y \circ z) = y \circ z$ โดยทฤษฎีบท 3.31 จะได้ $y \circ (y * z) \in A_n(x)$

ดังนั้น $y \circ z \in A_n(x)$ ในทางกลับกัน สมมติให้ $y \circ z \in A_n(x)$ จะแสดงว่า $y * z \in A_n(x)$

พิจารณา $y*(y\circ z)=(y*y)\circ(y*z)=1*(y*z)=y*z$ โดยทฤษฎีบท 3.31 จะได้ $y*(y\circ z)\in A_n(x)$

ดังนั้น $y*z\in A_n(x)$ □

ทฤษฎีบท 3.33 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจงและ $n\in N$ แล้ว $A_n(a*b)=A_n(a\circ b)$ สำหรับทุก $a,b\in X$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $A_n(a*b)\subseteq A_n(a\circ b)$ ให้ $z\in A_n(a*b)$ จะได้ว่า $(a*b)^n*z=1$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
1 &= (a*b)*((a*b)*\cdots*((a*b)*((a*b)*z)))\cdots) \\
&= (a*b)\circ((a*b)*\cdots*((a*b)*((a*b)*z)))\cdots) \\
&= ((a*b)\circ(a*b))*((a*b)\circ(a*b)\cdots*((a*b)*z))\cdots) \\
&= 1*((a*b)\circ(a*b)\cdots*((a*b)*z))\cdots) \\
&\vdots \\
&= (a*b)*z
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า $z\in A(a*b)=A(a\circ b)\subseteq A_n(a\circ b)$ นั่นคือ $A_n(a*b)\subseteq A_n(a\circ b)$

ต่อไปจะแสดงว่า $A_n(a\circ b)\subseteq A_n(a*b)$ ให้ $z\in A_n(a\circ b)$ จะได้ว่า $(a\circ b)^n*z=1$ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
1 &= (a\circ b)*((a\circ b)*\cdots*((a\circ b)*((a\circ b)*z)))\cdots) \\
&= (a\circ b)\circ((a\circ b)*\cdots*((a\circ b)*((a\circ b)*z)))\cdots) \\
&= ((a\circ b)\circ(a\circ b))*((a\circ b)\circ(a\circ b)\cdots*((a\circ b)*z))\cdots) \\
&= 1*((a\circ b)\circ(a\circ b)\cdots*((a\circ b)*z))\cdots) \\
&\vdots \\
&= (a\circ b)*z
\end{aligned}
$$

ทำให้ได้ว่า $z\in A(a\circ b)=A(a*b)\subseteq A_n(a*b)$ นั่นคือ $A_n(a\circ b)\subseteq A_n(a*b)$

ดังนั้น $A_n(a*b)=A_n(a\circ b)$ □

ทฤษฎีบท 3.34 ให้ X เป็นพีชคณิต-BEเทียมแจกแจงและ $n\in N$ จะได้ว่า $A_n(x)$ เป็นตัวกรองเทียมของ X ก็ต่อเมื่อ ถ้า

$c^n\leq a*b$ และ $c^n\leq a$ แล้ว $c^n\leq b$ สำหรับทุก $x,a,b,c\in X$

พิสูจน์ สมมติให้ $A_n(x)$ เป็นตัวกรองเทียมของ X ถ้า $c^n \leq a * b$ และ $c^n \leq a$ จะแสดงว่า $c^n \leq b$

ให้ $a, b, c \in X$ จาก $c^n \leq a * b$ และ $c^n \leq a$ จะได้ว่า $c^n * (a * b) = 1$ และ $c^n * a = 1$ ทำให้ได้ว่า $c^n \circ (a * b) = 1$ และ

$c^n \circ a = 1$

พิจารณา $c^n \circ b = 1 * (c^n \circ b)$

$= (c^n \circ a) * (c^n \circ b)$

$= c^n \circ (a * b)$

$= 1$

ดังนั้น $c^n \leq b$

ในทางกลับกัน สมมติให้ ถ้า $c^n \leq a * b$ และ $c^n \leq a$ แล้ว $c^n \leq b$ จะแสดงว่า $A_n(x)$ เป็นตัวกรองเทียมของ X

เนื่องจาก $1 \in A_n(x)$ ดังนั้น (F1) เป็นจริง ให้ $a, a * b \in A_n(x)$ จะได้ว่า $x^n * (a * b) = 1$ และ $x^n * a = 1$

โดยสมมติฐานจะได้ว่า $x^n * b = 1$ นั่นคือ $b \in A_n(x)$ ดังนั้น $A_n(x)$ เป็นตัวกรองเทียมของ X □

สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยที่กล่าวมา จะได้ว่า พีชคณิต-BEสามารถเป็นพีชคณิต-BEเทียมได้ โดยการกำหนดตัวดำเนินการทั้งสองให้มีการดำเนินการแบบเดียวกัน แต่ในทางกลับกัน พีชคณิต-BEเทียมไม่จำเป็นจะต้องเป็นพีชคณิต-BE มากไปกว่านั้น ยังพบว่า ส่วนขั้ววางนัยทั่วไปจะเป็นเซตย่อยของเซตบนวางนัยทั่วไปเสมอ และเซตย่อยของพีชคณิต-BEเทียมที่บรรจุเซตบนวางนัยทั่วไปหรือส่วนขั้ววางนัยทั่วไปจะเป็นตัวกรองเทียมของพีชคณิต-BEเทียม

เอกสารอ้างอิง

Ahn S. S., Kim Y. H., & Ko J. M. (2012). Filters in commutative BE-algebras . *Communications of the Korean Mathematical Society*, 2, 233-242. http://doi.org/10.4134/CKMS.2012.27.2.233

Ahn S. S., & So K .S. (2009). On generalized upper sets in BE-algebras. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *46*(2), 281-287. http://dx.doi.rog/10.4134/BKMS.2009.46.2.281

Ahn S. S. & So K. S. (2008). On ideals and upper sets in BE-algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae, 68*(2), 289-295.

Borzooei R. A., Borumand Saeid A., Rezaei A., Radfar A., & Ameri R. (2013). On pseudo BE-algebras. *Discussiones Mathematica, General Algebra and Applications*, *33*, 95-108.

Borzooei R. A., Borumand Saeid A., Rezaei A., Radfar A., & Ameri R. (2015). Distributive pseudo BE-algebras. *Fasciculi Mathematic, 54*, 21-39. https://doi.org/10.1515/fascmath-2015-0002

Kim H. S., & Kim Y. H. (2007). On BE-algebras. *Scientiae Mathematicae Japonicae*, *66*(1), 113-117.

Pumila A., Niamnuam K., Khamtum R., & Boonard S. (2017). On generalized upper sets and generalized terminal sections in BE-algebras. *Journal of Science and Technology Mahasarakham University, 36*(6), 678-684. (in Thai)