การประมาณทวินามด้วยวิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w

Binomial Approximation with Stein's Method and w–Functions

คุณากร แซ่เจ็ง และ คณินทร์ ธีรภาพโอฬาร*

Khunakorn Sae-Jeng and Kanint Teerapabolarn*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

Mathematical Department, Faculty of Science, Burapha University

Received : 8 January 2018

Accepted : 20 February 2018

Published online : 23 February 2018

บทคัดย่อ

การศึกษาครั้งนี้ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามที่อยู่ในรูปของระยะทางระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของทั้งสองฟังก์ชัน ขอบเขตไม่เอกรูปที่ได้สามารถใช้เป็นเกณฑ์ทางเลือกแบบใหม่สำหรับวัดความแม่นยำของการประมาณทวินาม สำหรับการประยุกต์ในเชิงทฤษฎี การศึกษาครั้งนี้ใช้ผลลัพธ์ไปประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ โพลยา และเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบ

คำสำคัญ : การประมาณทวินาม ขอบเขตไม่เอกรูป วิธีของสไตน์ ฟังก์ชัน w

Abstract

This study uses Stein's method and w-functions to determine a non-uniform bound for approximating the cumulative distribution function of a non-negative integer-valued random variable by the binomial cumulative distribution function that is in the form of the distance between the both cumulative distribution functions. The obtained non-uniform bound can be used as a new alternative criterion for measuring the accuracy of the binomial approximation. For theoretical applications, this study uses the result to approximate the cumulative distribution functions of hypergeometric, Polya and negative hypergeometric random variables.

Keywords : binomial approximation, non-uniform bound, Stein's method, functions w.

***Corresponding author. E-mail** : kanint@buu.ac.th

บทนำ

การประมาณทวินาม (Binomial approximation) เป็นการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable) ด้วยการแจกแจงทวินาม (Binomial distribution) โดยมีเกณฑ์ที่ใช้วัดความแม่นยำของการประมาณ ได้แก่ เกณฑ์ที่วัดความแม่นยำโดยใช้ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute error) ของการประมาณโดยตรง และเกณฑ์ที่วัดความแม่นยำโดยใช้ขอบเขตบน (Upper bound) ของการประมาณ ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย ในกรณีที่ใช้ขอบเขตบนเป็นเกณฑ์วัดความแม่นยำของการประมาณ Stein (1972) เป็นบุคคลแรกที่ได้นำเสนอวิธีของสไตน์ (Stein's method) มาประยุกต์ใช้กับการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องด้วยการแจกแจงทวินาม ต่อมา Ehm (1991) ได้ใช้วิธีของสไตน์หาขอบเขตเอกรูป (Uniform bound) สำหรับการประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี (Bernoulli random variable) ที่เป็นอิสระต่อกัน Barbour *et al.* (1992) ได้ปรับสมการของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามใน Stein (1972) ให้อยู่ในรูปแบบที่เหมาะสมเช่นเดียวกับการประมาณปัวซง (Poisson approximation) Soon (1996) ได้ใช้วิธีของสไตน์หาขอบเขตเอกรูปสำหรับการประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน Wongkasem *et al.* (2008) ได้ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตเอกรูปสำหรับการประมาณการแจกแจงทวินามทั่วไป (Generalized binomial distribution) ด้วยการแจกแจงทวินาม Prukpousana and Teerapabolarn (2010) ได้ใช้วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามและฟังก์ชัน w หาขอบเขตเอกรูปสำหรับการประมาณการแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบ (Negative hypergeometric distribution) ด้วยการแจกแจงทวินาม และ Teerapabolarn (2011) ได้ใช้วิธีเช่นเดียวกับ Wongkasem *et al.* (2008) ในการหาขอบเขตไม่เอกรูป (Non-uniform bound) สำหรับการประมาณแบบจุด(Pointwise approximation) ของการแจกแจงทวินามทั่วไปด้วยการแจกแจงทวินาม จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าการแจกแจงทวินามสามารถประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่เป็นตัวแปรสุ่มตัวเดียวหรือเป็นผลรวมตัวแปรสุ่มหลายตัว แต่ในกรณีที่ต้องการศึกษาการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบในรูปทั่วไปเพียงหนึ่งตัวแปร (ไม่เจาะจงชนิดของการแจกแจง) ด้วยการแจกแจงทวินาม Teerapabolarn and Wongkasem (2011) ได้กำหนดตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบมีลักษณะดังนี้

ให้ X แทนตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (Probability mass function) $p_X(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathscr{X}$ เมื่อ $\mathscr{X}$ คือ เซตของค่าตัวแปรสุ่ม X ที่มีค่าคาดหมาย $\mu = E(X)$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = Var(X) < \infty$ และให้ B แทนตัวแปรสุ่มทวินาม (Binomial random variable) ที่มีพารามิเตอร์ $n\ (n \in \mathbb{N})$ และ $p\ (0 < p = 1 - q < 1)$ ซึ่งมีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังนี้

$$p_B(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\ x = 0,1,\dots,n \tag{1}$$

โดยมีค่าเฉลี่ย $E(B) = np$ และความแปรปรวน $Var(B) = npq$ ในการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ด้วยการแจกแจงทวินาม Teerapabolarn and Wongkasem (2011) ได้ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w หาขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับเมตริกแบบจุด (Point metric) ระหว่างการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X และการแจกแจงทวินามดังนี้

กรณีที่ $x_0 = 0$

$$d_0(X,B) \le \frac{1-q^n}{np}\left\{E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| + |np-\mu|\right\} \tag{2}$$

และถ้า $np = \mu$ แล้ว

$$d_0(X,B) \le \frac{1-q^n}{np} E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| \tag{3}$$

กรณีที่ $x_0 \in \{1,...,n\}$

$$d_{x_0}(X,B) \le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\}\left\{E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| + |np-\mu|\right\} \tag{4}$$

และถ้า $np = \mu$ แล้ว

$$d_{x_0}(X,B) \le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| \tag{5}$$

โดยที่ $d_{x_0}(X,B) = \left|p_X(x_0) - p_B(x_0)\right|$ เมื่อ $x_0 \in \{0,...,n\}$

พิจารณาผลลัพธ์ในอสมการ (2) ถึง (5) ผลลัพธ์ดังกล่าวสามารถประยุกต์ใช้ได้เฉพาะการประมาณการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ด้วยการแจกแจงทวินามที่อยู่ในรูปของการประมาณแบบจุดเท่านั้น ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จึงต้องการหาผลลัพธ์ใหม่เพื่อใช้ประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่ม X ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินาม และรูปแบบของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมจะอยู่ในรูปของระยะทางระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมสองฟังก์ชัน ซึ่งเรียกกันโดยทั่วไปว่าระยะทางของคอลโมโกรอฟ (Kolmogorov distance) และใช้ขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของคอลโมโกรอฟเป็นเกณฑ์ทางเลือกแบบใหม่ที่ใช้วัดความแม่นยำของการประมาณครั้งนี้ ซึ่งระยะทางของคอลโมโกรอฟระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามนิยามดังนี้

$$d_{K_{x_0}}(X,B) = \left|P(X \le x_0) - P(B \le x_0)\right| \tag{6}$$

โดยที่ $P(X \le x_0)$ และ $P(B \le x_0)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามที่ $x_0 \in \{0,...,n\}$ ตามลำดับ ดังนั้นวัตถุประสงค์ของการวิจัยในครั้งนี้ คือ หาขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับ $d_{K_{x_0}}(X,B)$ เมื่อ $x_0 \in \{0,...,n\}$

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาครั้งนี้ใช้วิธีของสไตน์และฟังก์ชัน w เพื่อหาผลการวิจัยที่ต้องการ ซึ่งจะเริ่มต้นด้วยบริบทของฟังก์ชัน w และตามด้วยวิธีของสไตน์ พร้อมด้วยการสร้างบทตั้ง (lemma) ต่าง ๆ เพื่อช่วยในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ดังนี้ต่อไปนี้

ฟังก์ชัน w

ให้ X แทนตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบดังที่นิยามมาแล้ว Cacoullos and Papathanasiou (1989) ได้นิยามฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X หรือสัมพันธ์กับการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ในรูปของความสัมพันธ์ดังนี้

$$w(x)p_X(x) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{x}(\mu - i)p_X(i), \quad x \in \mathscr{X} \tag{7}$$

ต่อมา Majsnerowska (1998) ได้ปรับรูปความสัมพันธ์ในสมการ (7) ให้อยู่ในรูปแบบของความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$w(x) = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\mu + \frac{\sigma^2 w(x-1)p_X(x-1)}{p_X(x)} - x\right\} \geq 0, \quad x \in \mathscr{X} \setminus \{0\} \tag{8}$$

โดยที่ $w(0) = \frac{\mu}{\sigma^2}$ และ $p_X(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathscr{X}$

รูปแบบความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน w สำหรับการสร้างผลการวิจัยซึ่ง Cacoullos and Papathanasiou (1989) ได้กำหนดไว้ดังนี้

ถ้าตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ X ที่มี $p_X(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathscr{X}$ และมีความแปรปรวนจำกัด $0 < \sigma^2 < \infty$ แล้ว

$$E\left[(X-\mu)g(X)\right] = \sigma^2 E\left[w(X)\Delta g(X)\right] \tag{9}$$

สำหรับฟังก์ชัน $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $E\left|w(X)\Delta g(X)\right| < \infty$ โดย $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$ และเมื่อกำหนด $g(x) = x$ จะได้ว่า $E[w(X)] = 1$

วิธีของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินาม

วิธีของสไตน์ได้มีการนำเสนอครั้งแรกโดย Stein (1972) ซึ่งเป็นการประมาณการแจกแจงของผลรวมตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกันด้วยการแจกแจงปรกติ (Normal distribution) ต่อมา Chen (1975) ได้ปรับปรุงและพัฒนาวิธีของสไตน์มาสู่การประมาณการแจกแจงของผลรวมของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่ไม่เป็นอิสระต่อกันด้วยการแจกแจงปัวซง (Poisson distribution) และ Stein (1986) ได้นำวิธีนี้มาใช้กับการแจกแจงทวินาม ซึ่งเรียกว่า การประมาณทวินามด้วยวิธีของสไตน์ และสมการของสไตน์สำหรับการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p (Barbour *et al.*, 1992) เป็นดังนี้

$$h(x)-B_{n,p}(h)=(n-x)pg(x+1)-qxg(x) \tag{10}$$

โดยที่ $B_{n,p}(h)=\sum_{k=0}^{n}h(k)\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ และ g และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตและนิยามบนเซต $\{0,1,\ldots,n\}$

สำหรับ $E\subseteq\{0,\ldots,n\}$ ให้ $h_E:\{0,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$h_E(x)=\begin{cases}1 & ,x\in E\\ 0 & ,x\notin E\end{cases} \tag{11}$$

Barbour *et al*. (1992) กำหนดให้ $g_E:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ (10) โดยที่ $g_E(0)=g_E(1)$ และ $g_E(x)=g_E(n)$ สำหรับทุก $x\geq n$ ดังนั้น ผลเฉลย g_E ของสมการ (10) คือ

$$g_E(x)=\frac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{E\cap C_{x-1}})-\mathbb{B}_{n,p}(h_E)\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x-1}})}{x\binom{n}{x}p^xq^{n-x+1}} \tag{12}$$

สำหรับทุก $1\leq x\leq n$ และ $C_x=\{0,\ldots,x\}$

เมื่อ $E=\{x_0\}$ สำหรับ $x_0\in\{0,\ldots,n\}$ ให้ $h_{x_0}=h_{\{x_0\}}$ ดังนั้นจะสามารถเขียนผลเฉลย $g_{x_0}=g_{\{x_0\}}$ ของสมการ (12) ได้ดังนี้

$$g_{x_0}(x)=\begin{cases}\dfrac{-\mathbb{B}_{n,p}(h_{x_0})\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x-1}})}{x\binom{n}{x}p^xq^{n-x+1}} & ,\quad 1\leq x\leq x_0\\[2ex] \dfrac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{x_0})\mathbb{B}_{n,p}(1-h_{C_{x-1}})}{x\binom{n}{x}p^xq^{n-x+1}} & ,\quad x_0<x\leq n\end{cases} \tag{13}$$

และเมื่อ $E=C_{x_0}$ สำหรับ $x_0\in\{0,\ldots,n\}$ จะได้ผลเฉลย $g_{C_{x_0}}$ ของสมการ (12) ดังนี้

$$g_{C_{x_0}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x-1}})\mathbb{B}_{n,p}(1-h_{C_{x_0}})}{x\binom{n}{x}p^xq^{n-x+1}} & ,\quad 1\leq x\leq x_0\\[2ex] \dfrac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x_0}})\mathbb{B}_{n,p}(1-h_{C_{x-1}})}{x\binom{n}{x}p^xq^{n-x+1}} & ,\quad x_0<x\leq n\end{cases} \tag{14}$$

ให้ $\Delta g_{x_0}(x)=g_{x_0}(x+1)-g_{x_0}(x)$ และ $\Delta g_{C_{x_0}}(x)=g_{C_{x_0}}(x+1)-g_{C_{x_0}}(x)$ และ Teerapabolarn and Sae-Jeng (2017) ได้แสดงว่าสำหรับทุก $x,x_0\in\{1,\ldots,n\}$ แล้วอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\Delta g_{x_0}(x)\begin{cases} >0 & , x_0 = x \\ <0 & , x_0 \neq x \end{cases} \tag{15}$$

และ

$$\Delta g_{C_{x_0}}(x)\begin{cases} >0 & , 1 \le x \le x_0 \\ <0 & , x_0 < x \le n \end{cases} \tag{16}$$

และเมื่อ $1 \le x \le x_0$

$$\Delta g_{C_{x_0}}(x) \le \Delta g_{C_{x_0}}(x_0) \tag{17}$$

เนื่องจาก $g_E(x) = -g_{E^c}(x)$ (Barbour *et al.*, 1992) จะได้ว่า

$$\Delta g_E(x) = -\Delta g_{E^c}(x) \tag{18}$$

โดยที่ E^c คือ คอมพลีเมนท์ของ E

บทตั้ง **2.1** ให้ $x, x_0 \in \{1,...,n\}$ แล้วจะได้ว่าอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$g_{C_{x_0}}(x) \le g_{C_{x_0}}(x_0+1) \tag{19}$$

พิสูจน์ จากอสมการ (16) จะได้ว่า $g_{C_{x_0}}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มสำหรับ $x \in \{1,...,x_0\}$ และเป็นฟังก์ชันลดสำหรับ $x \in \{x_0+1,...,n\}$ ดังนั้นจะได้ $g_{C_{x_0}}(x) \le g_{C_{x_0}}(x_0)$ สำหรับทุก $x \in \{1,...,x_0\}$ และ $g_{C_{x_0}}(x) \le g_{C_{x_0}}(x_0+1)$ สำหรับทุก $x \in \{x_0+1,...,n\}$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
g_{C_{x_0}}(x_0+1) - g_{C_{x_0}}(x_0) &= \frac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x_0}})\mathbb{B}_{n,p}(1-h_{C_{x0}})}{(x_0+1)\binom{n}{x_0+1}p^{x_0+1}q^{n-x_0}} - \frac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x_0-1}})\mathbb{B}_{n,p}(1-h_{C_{x_0}})}{x_0\binom{n}{x_0}p^{x_0}q^{n-x_0+1}} \\
&= \frac{\mathbb{B}_{n,p}(1-h_{C_{x0}})}{\binom{n}{x_0}p^{x_0}q^{n-x_0}}\left[\frac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x_0}})}{(n-x_0)p} - \frac{\mathbb{B}_{n,p}(h_{C_{x_0-1}})}{x_0 q}\right] \\
&= \frac{\sum_{j=x_0+1}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}}{x_0\binom{n}{x_0}p^{x_0+1}q^{n-x_0+1}(n-x_0)}\left[\sum_{k=0}^{x_0} x_0\binom{n}{k}p^k q^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{x_0-1}(n-x_0)\binom{n}{k}p^{k+1}q^{n-k}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{j=x_0+1}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}}{x_0\binom{n}{x_0}p^{x_0+1}q^{n-x_0+1}(n-x_0)}\left[\sum_{k=0}^{x_0}\frac{x_0(n-k+1)}{n+1}\binom{n+1}{k}p^k q^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{x_0-1}\frac{(k+1)(n-x_0)}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^{k+1}q^{n+1-(k+1)}\right]$$

$$= \frac{\sum_{j=x_0+1}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}}{x_0\binom{n}{x_0}p^{x_0+1}q^{n-x_0+1}(n-x_0)}\left[\sum_{k=0}^{x_0}\frac{x_0(n-k+1)}{n+1}\binom{n+1}{k}p^k q^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{x_0}\frac{k(n-x_0)}{n+1}\binom{n+1}{k}p^k q^{n+1-k}\right]$$

$$= \frac{\sum_{j=x_0+1}^{n}\binom{n}{j}p^j q^{n-j}}{x_0\binom{n}{x_0}p^{x_0+1}q^{n-x_0+1}(n-x_0)}\left[\sum_{k=0}^{x_0}\frac{x_0(n+1)-kn}{n+1}\binom{n+1}{k}p^k q^{n+1-k}\right]$$

$$\geq 0$$

ซึ่งจะได้ว่า $g_{C_{x_0}}(x) \leq g_{C_{x_0}}(x_0+1)$ สำหรับทุก $x \in \{1,\ldots,n\}$ จึงทำให้อสมการ (19) เป็นจริง □

บทตั้ง 2.2 ให้ $x, x_0 \in \{1,\ldots,n\}$ แล้วจะได้ว่า

1. $\sup_{x\geq 1}\left\{g_{C_0}(x)\right\} \leq \frac{1-q^n}{np}$ (20)
2. $\sup_{x\geq 1}\left|\Delta g_{C_0}(x)\right| \leq \frac{np+q^n-1}{(n-1)np^2}$ (21)
3. $\sup_{x\geq 1}\left\{g_{C_{x_0}}(x)\right\} \leq \xi(x_0)$ (22)

โดยที่ $\xi(x_0) = \begin{cases} \dfrac{(n-x_0-1)\left[1-P(B\leq x_0)\right]}{(n-x_0)\left[(n-1)p-x_0\right]} & , x_0 < (n-1)p \\ \dfrac{(x_0+2)P(B\leq x_0)}{(x_0+1)\left[x_0+2-(n-1)p\right]} & , x_0 \geq (n-1)p \end{cases}$ และ $P(B\leq x_0) = \sum_{k=0}^{x_0} p_B(k)$

4. $\sup_{x\geq 1}\left|\Delta g_{C_{x_0}}(x)\right| \leq \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\}$ (23)

พิสูจน์ 1. โดย Barbour *et al.* (1992) จะได้ว่า g_0 เป็นฟังก์ชันลดที่มีค่ามากกว่าศูนย์สำหรับ $x \in \{1,\ldots,n\}$ ดังนั้นจึงทำให้ $g_0(x) \leq g_0(1)$ สำหรับทุก $x \in \{1,\ldots,n\}$ นั่นคือ

$$g_0(x) \le g_0(1) = \frac{\mathbb{B}_{n,p}(h_0)\mathbb{B}_{n,p}(1-h_{c_0})}{\binom{n}{1}pq^n}$$

$$= \frac{q^n(1-q^n)}{npq^n}$$

$$= \frac{(1-q^n)}{np}$$

ซึ่งจะได้อสมการ (20)

2. ได้พิสูจน์ไว้แล้วในงานวิจัยของ Teerapabolarn (2011)

3. โดยบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า $g_{C_{x_0}}(x) \le g_{C_{x_0}}(x_0+1)$ สำหรับทุก $x_0, x \in \{1,\ldots,n\}$ และ

$$g_{C_{x_0}}(x_0+1) = \frac{P(B \le x_0)\left[1-P(B \le x_0)\right]}{(x_0+1)\binom{n}{x_0+1}p^{x_0+1}q^{n-x_0}} \tag{24}$$

โดยใช้ทฤษฎีบทใน Barbour *et al*. (1992) จะได้ว่า

$$g_{C_{x_0}}(x_0+1) \le \begin{cases} \dfrac{(n-x_0-1)\left[1-P(B \le x_0)\right]}{(n-x_0)\left[(n-1)p-x_0\right]} & , x_0 < (n-1)p \\ \dfrac{(x_0+2)P(B \le x_0)}{(x_0+1)\left[x_0+2-(n-1)p\right]} & , x_0 \ge (n-1)p \end{cases}$$

ซึ่งทำให้ได้อสมการ (22) ตามต้องการ

4. จะแสดงว่า $\left|\Delta g_{C_{x_0}}(x)\right| \le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\}$ สำหรับทุก $x \in \{1,\ldots,n\}$

Teerapabolarn and Wongkasem (2011) ได้แสดงว่า

$$\Delta g_{x_0}(x_0) \le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} \tag{25}$$

และ

$$\Delta g_x(x) \le \min\left\{\frac{1-p^n}{xq}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} \tag{26}$$

เมื่อ $1 \le x \le x_0$ จะได้ว่า

$$\left|\Delta g_{C_{x_0}}(x)\right| = \Delta g_{C_{x_0}}(x) \qquad \text{(โดย (16))}$$

$$\le \Delta g_{C_{x_0}}(x_0) \qquad \text{(โดย (17))}$$

$$= \sum_{k=0}^{x_0} \Delta g_k(x_0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta g_0(x_0) + \Delta g_1(x_0) + \cdots + \Delta g_{x_0}(x_0) \\
&\le \Delta g_{x_0}(x_0) \qquad \text{(โดย (15))} \\
&\le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} \quad \text{(โดย (25))} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $x_0 < x \le n$

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta g_{C_{x_0}}(x)\right| &\le -\Delta g_{C_{x_0}}(x) \qquad \text{(โดย (16))} \\
&= \Delta g_{C_{x_0}^c}(x) \qquad \text{(โดย (18))} \\
&= \sum_{k=x_0+1}^{n} \Delta g_k(x) \\
&= \Delta g_{x_0+1}(x) + \cdots + \Delta g_x(x) + \cdots + \Delta g_n(x) \\
&\le \Delta g_x(x) \qquad \text{(โดย (15))} \\
&\le \min\left\{\frac{1-p^n}{xq}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} \quad \text{(โดย (26))} \\
&\le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} \quad \text{(โดย } x_0 < x\text{)} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

จากอสมการ (27) และ (28) จะได้ว่า

$$
\left|\Delta g_{C_{x_0}}(x)\right| \le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\}
$$

สำหรับทุก $x \in \{1,\ldots,n\}$ ซึ่งจะได้อสมการ (23) ตามที่ต้องการ □

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยที่ต้องการในการศึกษาครั้งนี้ คือ ขอบเขตไม่เอกรูปสำหรับระยะทางของคอลโมโกรอฟระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินาม ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. ให้ X แทนตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบดังที่ได้นิยามมาแล้ว และ $w(X)$ คือ ฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X แล้วผลลัพธ์ต่อไปนี้เป็นจริง

(i) สำหรับ $x_0 = 0$ จะได้ว่า

$$
d_{K_0}(X,B) \le \frac{np+q^n-1}{(n-1)np^2} E\left|(n-X)p - \sigma^2 w(X)\right| + \frac{1-q^n}{np}\left|np-\mu\right| \qquad (29)
$$

และถ้า $np=\mu$ แล้ว

$$d_{K_0}(X,B) \le \frac{np+q^n-1}{(n-1)np^2} E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| \tag{30}$$

(ii) สำหรับ $x_0 \in \{1,\ldots,n\}$

$$d_{K_{x_0}}(X,B) \le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| + \xi(x_0)\left|np-\mu\right| \tag{31}$$

และถ้า $np=\mu$ แล้ว

$$d_{K_{x_0}}(X,B) \le \min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q}, \frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\} E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| \tag{32}$$

โดยที่ $\xi(x_0)$ นิยามดังอสมการ (22)

พิสูจน์ จากสมการของสไตน์ (10) เมื่อแทน h ด้วย $h_{C_{x_0}}$ และแทน x ด้วยตัวแปรสุ่ม X แล้วหาค่าคาดหมายตลอดสมการจะได้

$$\begin{aligned}
d_{K_{x_0}}(X,B) &= \left|E\left[(n-X)pg(X+1)-qXg(X)\right]\right| \\
&= \left|npE[g(X+1)]-pE[Xg(X+1)]-qE[Xg(X)]\right| \\
&= \left|npE[g(X+1)]-\left[pE[Xg(X+1)]-pE[Xg(X)]\right]-E[Xg(X)]\right| \\
&= \left|npE[g(X+1)]-pE[X\Delta g(X)]-E[Xg(X)]\right| \\
&= \left|npE[g(X+1)]-pE[X\Delta g(X)]-E[(X-\mu)g(X)-\mu g(X)]\right| \\
&= \left|npE[\Delta g(X)]-pE[X\Delta g(X)]-E[(X-\mu)g(X)]+(np-\mu)E[g(X)]\right|
\end{aligned}$$

โดยที่ $g=g_{C_{x_0}}$ นิยามดังสมการ (14) เนื่องจาก $E\left|w(X)\Delta g(X)\right| \le \sup_{x\ge 1}|\Delta g(x)|E|w(X)| = \sup_{x\ge 1}|\Delta g(x)| < \infty$ ดังนั้นโดยสมการ (9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
d_{K_{x_0}}(X,B) &= \left|npE[\Delta g(X)]-pE[X\Delta g(X)]-\sigma^2 E[w(X)\Delta g(X)]+(np-\mu)E[g(X)]\right| \\
&\le \left|E\left[np\Delta g(X)-pX\Delta g(X)-\sigma^2 w(X)\Delta g(X)\right]\right| + \left|(np-\mu)E[g(X)]\right| \\
&\le E\left\{\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right|\left|\Delta g(X)\right|\right\} + \left|np-\mu\right|E\left|g(X)\right| \\
&\le \sup_{x\ge 1}\left|\Delta g(x)\right| E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| + \sup_{x\ge 1}\{g(x)\}\left|np-\mu\right|
\end{aligned} \tag{33}$$

พิจารณาอสมการ (33) โดยใช้อสมการ (20) และ (21) จะได้ว่าอสมการ (29) และ (30) เป็นจริง ในทำนองเดียวกันโดยใช้อสมการ (22) และ (23) จะได้ว่าอสมการ (31) และ (32) เป็นจริงเช่นเดียวกัน □

บทแทรก 1. ถ้า $(n-x)p-\sigma^2 w(x)\geq 0$ สำหรับทุก $x\in\mathscr{X}$ หรือ $(n-x)p-\sigma^2 w(x)\leq 0$ สำหรับทุก $x\in\mathscr{X}$ แล้วจะได้ว่า

(i) สำหรับ $x_0=0$ จะได้ว่า

$$d_{K_0}(X,B)\leq\frac{np+q^n-1}{(n-1)np^2}\left|(n-\mu)p-\sigma^2\right|+\frac{1-q^n}{np}\left|np-\mu\right| \tag{34}$$

และถ้า $np=\mu$ แล้ว

$$d_{K_0}(X,B)\leq\frac{np+q^n-1}{(n-1)np^2}\left|(n-\mu)p-\sigma^2\right| \tag{35}$$

(ii) สำหรับ $x_0\in\{1,\ldots,n\}$

$$d_{K_{x_0}}(X,B)\leq\min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q},\frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\}\left|(n-\mu)p-\sigma^2\right|+\xi(x_0)\left|np-\mu\right| \tag{36}$$

และถ้า $np=\mu$ แล้ว

$$d_{K_{x_0}}(X,B)\leq\min\left\{\frac{1-p^n}{x_0 q},\frac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)pq}\right\}\left|(n-\mu)p-\sigma^2\right| \tag{37}$$

พิสูจน์ การพิสูจน์อสมการ (34) และ (37) จะต้องแสดงว่า $E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right|=\left|(n-\mu)p-\sigma^2\right|$ ดังนี้

ถ้า $(n-x)p-\sigma^2 w(x)\geq 0$ สำหรับทุก $x\in\mathscr{X}$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| &= E\left[(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right] \\ &= (n-\mu)p-\sigma^2 \quad (\text{โดย } E\left[w(X)\right]=1\ ) \end{aligned} \tag{38}$$

ในทำนองเดียวกันถ้า $(n-x)p-\sigma^2 w(x)\leq 0$ สำหรับทุก $x\in\mathscr{X}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| &= -E\left[(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right] \\ &= -\left[(n-\mu)p-\sigma^2\right] \end{aligned} \tag{39}$$

ดังนั้นจากสมการ (38) และ (39) จะได้

$$E\left|(n-X)p-\sigma^2 w(X)\right| = \left|(n-\mu)p-\sigma^2\right|$$

ซึ่งทำให้ได้อสมการ (34) และ (37) เป็นจริง □

หมายเหตุ เนื่องจากขอบเขตของผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 1 และบทแทรก 1 ขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ดังนั้นในการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์จึงจำเป็นต้องหาฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มที่ต้องการ ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ (8)

การประยุกต์ใช้ผลการวิจัย

การประยุกต์ใช้ผลการวิจัยเป็นการนำเสนอตัวอย่างของการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์ของการประมาณทวินามในทฤษฎีบท 1 และบทแทรก 1 เพื่อประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบสามการแจกแจง ได้แก่ การแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์ การแจกแจงโพลยา และการแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบ

ตัวอย่าง 1. การแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ที่มีพารามิเตอร์ $N,\ m$ และ n มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังนี้

$$p_X(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad ,\ x = 0,1,\ldots,\min\{n,m\} \tag{40}$$

และมีค่าเฉลี่ย $\mu = E(X) = \dfrac{nm}{N}$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = Var(X) = \dfrac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$

โดยใช้สมการ (8) จะได้ฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ในรูป $w(x) = \dfrac{(n-x)(m-x)}{N\sigma^2}$

ในกรณีที่ $\min\{n,m\} = n$ และให้ $p = \dfrac{m}{N}$ เมื่อแทนค่า $p = \dfrac{m}{N}$ ลงในทฤษฎีบท 1 จะได้ $(n-x)p - \sigma^2 w(x) = \dfrac{(n-x)m}{N} - \dfrac{(n-x)(m-x)}{N} = \dfrac{(n-x)x}{N} \geq 0$ สำหรับทุก $0 \leq x \leq n$ ดังนั้นโดยการประยุกต์ใช้บทแทรก 1 จะได้ผลลัพธ์ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 2. ถ้า $\min\{n,m\} = n$ ให้ $p = \dfrac{m}{N}$ แล้วจะได้ว่า

$$d_{K_{x_0}}(X,B) \leq \begin{cases} \dfrac{(np+q^n-1)(N-m)}{m(N-1)} & ,\quad x_0 = 0 \\ \min\left\{\dfrac{1-p^n}{x_0}, \dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)p}\right\}\dfrac{nm(n-1)}{N(N-1)} & ,\quad 1 \leq x_0 \leq n \end{cases} \tag{41}$$

ผลลัพธ์ในอสมการ (41) ได้ชี้ให้เห็นว่าการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ $\frac{m}{N}$ จะมีผลการประมาณที่ดีเมื่อ N มีค่ามากและ m และ n มีค่าน้อย

ในกรณีที่ $\min\{n,m\}=m$ และให้ $p=\frac{n}{N}$ เมื่อแทนค่า n ด้วย m และ $p=\frac{n}{N}$ ลงในทฤษฎีบท 1 จะได้ $(n-x)p-\sigma^2 w(x)=\frac{(m-x)n}{N}-\frac{(n-x)(m-x)}{N}=\frac{x(m-x)}{N}\geq 0$ สำหรับทุก $0\leq x\leq m$ ดังนั้นโดยการประยุกต์ใช้บทแทรก 1 จะได้ผลลัพธ์ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3. ถ้า $\min\{n,m\}=m$ ให้ $p=\frac{n}{N}$ แล้วจะได้ว่า

$$d_{K_{x_0}}(X,B)\leq\begin{cases}\dfrac{(mp+q^m-1)(N-n)}{n(N-1)} & , \quad x_0=0\\ \min\left\{\dfrac{1-p^m}{x_0},\dfrac{1-p^{m+1}-q^{m+1}}{(m+1)p}\right\}\dfrac{nm(m-1)}{N(N-1)} & , \quad 1\leq x_0\leq m\end{cases} \tag{42}$$

การประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ m และ $\frac{n}{N}$ จะมีผลการประมาณที่ดีเมื่อ N มีค่ามากและ m และ n มีค่าน้อยเช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 2. การแจกแจงโพลยา

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มโพลยาที่มีพารามิเตอร์ N, n และ m มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังนี้

$$p_X(x)=\frac{\binom{m+x-1}{x}\binom{N-m+n-x-1}{n-x}}{\binom{N+n-1}{n}},\ x=0,\ldots,n \tag{43}$$

และมีค่าเฉลี่ย $\mu=E(X)=\frac{nm}{N}$ และความแปรปรวน $\sigma^2=Var(X)=\frac{nm(N+n)(N-m)}{N^2(N+1)}$

โดยใช้สมการ (8) จะได้ฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มโพลยาในรูป $w(x)=\frac{(m+x)(n-x)}{N\sigma^2}$ ให้ $p=\frac{m}{N}$ และแทนค่า $p=\frac{m}{N}$ ลงในทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $(n-x)p-\sigma^2 w(x)=\frac{(n-x)m}{N}-\frac{(m+x)(n-x)}{N}=-\frac{(n-x)x}{N}\leq 0$ สำหรับทุก $0\leq x\leq n$ ดังนั้นโดยประยุกต์ใช้บทแทรก 1 จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

บทแทรก 4. ให้ $p=\frac{m}{N}$ แล้วจะได้ว่า

$$d_{K_{x_0}}(X,B)\le\begin{cases}\dfrac{(np+q^n-1)(N-m)}{m(N+1)} & , \quad x_0=0\\ \min\left\{\dfrac{1-p^n}{x_0},\dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)p}\right\}\dfrac{mn(n-1)}{N(N+1)} & , \quad 1\le x_0\le n\end{cases} \qquad (44)$$

การประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มโพลยาด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ $\frac{m}{N}$ จะมีผลการประมาณที่ดีเมื่อ N มีค่ามากและ m และ n มีค่าน้อย

ตัวอย่าง 3. **การแจกแจงเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบ**

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบที่มีพารามิเตอร์ N, n และ m มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นดังนี้

$$p_X(x)=\frac{\binom{m+x-1}{x}\binom{N-m-x}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \ x=0,1,\ldots,n \qquad (45)$$

และมีค่าเฉลี่ย $\mu=E(X)=\frac{nm}{N-n+1}$ และความแปรปรวน $\sigma^2=Var(X)=\frac{nm(N-n-m+1)(N+1)}{(N-n+1)^2(N-n+2)}$

โดยใช้สมการ (8) จะได้ฟังก์ชัน w ที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบในรูป $w(x)=\frac{(m+x)(n-x)}{(N-n+1)\sigma^2}$ ให้ $p=\frac{m}{N-n+1}$ แทนค่า $p=\frac{m}{N-n+1}$ ลงในทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $(n-x)p-\sigma^2w(x)=\frac{(n-x)m}{N-n+1}-\frac{(m+x)(n-x)}{N-n+1}=-\frac{(n-x)x}{N-n+1}\le 0$ สำหรับทุก $0\le x\le n$ ดังนั้นโดยประยุกต์ใช้บทแทรก 1 จะได้ผลลัพธ์ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 5. ให้ $p=\frac{m}{N-n+1}$ แล้วจะได้ว่า

$$d_{K_{x_0}}(X,B)\le\begin{cases}\dfrac{(np+q^n-1)(N-m-n+1)}{m(N-n+2)} & , \quad x_0=0\\ \min\left\{\dfrac{1-p^n}{x_0},\dfrac{1-p^{n+1}-q^{n+1}}{(n+1)p}\right\}\dfrac{mn(n-1)}{(N-n+1)(N-n+2)} & , \quad 1\le x_0\le n\end{cases} \qquad (46)$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบสามารถประมาณได้ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ $\frac{m}{N-n+1}$ ได้ดีเมื่อ N มีค่ามากและ m และ n มีค่าน้อย

สรุปผลการวิจัย

ขอบเขตไม่เอกรูปจากการศึกษาครั้งนี้ได้มาโดยใช้วิธีสไตน์และฟังก์ชัน w ขอบเขตไม่เอกรูปดังกล่าวเป็นเกณฑ์ทางเลือกแบบใหม่ที่ใช้วัดความแม่นยำของการประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบด้วยฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินาม ซึ่งผลของการประมาณจะมีความแม่นยำเมื่อขอบเขตไม่เอกรูปมีค่าน้อย นั่นคือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มทวินามจะสามารถประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าจำนวนเต็มไม่เป็นลบได้ดีเมื่อขอบเขตไม่เอกรูปมีค่าน้อย และในการประยุกต์ใช้ผลลัพธ์เชิงทฤษฎี ได้นำผลลัพธ์ที่ได้ไปประมาณฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มเรขาคณิตไฮเพอร์ โพลยา และเรขาคณิตไฮเพอร์เชิงลบ

เอกสารอ้างอิง

Barbour, A. D., Holst, L., & Janson, S. (1992). *Poisson approximation* (Oxford Studies in Probability 2). Oxford: Clarendon Press.

Cacoullos, T., & Papathanasiou, V. (1989). Characterization of distributions by variance bounds. *Statistics & Probability Letters*, *7*(5), 351-356.

Chen, L. H. Y. (1975). Poisson approximation for dependent trials. *Annals of Probability*, *3*(3), 535-545.

Ehm, W. (1991). Binomial approximation to the Poisson binomial distribution. *Statistics & Probability Letters, 11*(1), 7-16.

Teerapabolarn, K., & Sae-Jeng, K. (2017). A non-uniform bound on binomial approximation to the beta binomial cumulative distribution function. Retrieved January 3, 2018, from http://rdo.psu.ac.th/sjstweb/Ar-Press/60-Nov/23.pdf.

Majsnerowska, M. (1998). A note on Poisson approximation by w-functions. *Applicationes Mathematicae*, *25*(3), 387-392.

Prukpousana, K., & Teerapabolarn, K. (2010). Binomial approximation to the negative hypergeometric distribution. *KKU Science Journal, 38*(4), 606-616. (in Thai)

Soon, S. Y. T. (1996). Binomial approximation for dependent indicators. *Statistica Sinica*, *6*(3), 703-714.

Stein, C. M. (1972). A bound for the error in normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (pp. 583-602). Berkeley: University of California Press.

Stein, C. M. (1986). *Approximate computation of expectations*. Hayward California: IMS.

Teerapabolarn, K. (2011). A non-uniform bound on pointwise approximation of generalized binomial distribution by binomial diatribution. *Srinakharinwirot Science Journal*, *27*(1), 37-52. (in Thai)

Teerapabolarn, K., & Wongkasem, P. (2011). On pointwise binomial approximation by *w*-functions. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *71*(1), 57-66.

Wongkasem, P., Teerapabolarn, K., & Gulasirima, R. (2008). On approximating a generalized binomial by binomial and Poisson distributions. *International Journal of statistics and Systems*, *3*(2), 113-124.