ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสองที่สามารถลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

Characterization of a Nonlinear Second Order ODE Reducible to a Separable Equation

พรทิพย์ เกษมพิณ ศุจินันท์ ชินเทศ และ อารยา วิวัฒน์วานิช*

Pornthip Kasempin, Sujinan Chinated and Araya Wiwatwanich*

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University

Received : 12 June 2017

Accepted : 14 July 2017

Published online : 26 July 2017

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาลักษณะของฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสอง ซึ่งอยู่ในรูป $y'' + p(x, y)y' = G(x, y)$ ที่สามารถลดรูปให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Equations) โดยใช้การหาอนุพันธ์ย่อยมาช่วยในการลดรูป ผลลัพธ์หลักที่ได้คือ ถ้าสมการ $y'' + p(x, y)y' = G(x, y)$ สามารถลดรูปเป็น $y' = A(x)B(y)$ แล้ว $G_y(x, y) = -p_x(x, y)$

คำสำคัญ : สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น สมการแบบแยกตัวแปรได้

Abstract

This paper aims to investigate the characteristics of a second order nonlinear ordinary differential equation in the form $y'' + p(x, y)y' = G(x, y)$ which is reducible to a separable equation. In this regard, partial differentiation is the main tool for the reduction process. The main result reveals that “if the second order equation $y'' + p(x, y)y' = G(x, y)$ above can be reduced to $y' = A(x)B(y)$, where $A(x)$ is a function of x and $B(y)$ is a function of y, then $G_y(x, y) = -p_x(x, y)$”

Keywords : nonlinear ordinary differential equations, separable equations

***Corresponding author. E-mail** : arywwwn@gmail.com

บทนำ

การลดอันดับ (reduction of order) เป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสอง วิธีหนึ่งโดยใช้การเปลี่ยนตัวแปรเพื่อลดรูปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับหนึ่ง ซึ่งหาผลเฉลยได้ง่ายกว่า แต่ใช่ว่าสมการอันดับสองจะสามารถลดอันดับได้เสมอไป สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสองแบบทั่วไป จะอยู่ในรูป $F(x, y, y', y'') = 0$ โดยที่ F เป็นตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น สมการนี้จะสามารถลดรูปได้อย่างแน่นอนถ้าในสมการไม่ปรากฏตัวแปรต้น (x) หรือไม่ปรากฏตัวแปรตาม (y) ส่วนในกรณีที่ในสมการปรากฏทั้งตัวแปรต้นและตัวแปรตาม สมการนั้นอาจจะมีหรือไม่มีสมการลดรูปก็ได้ (Satravaha, 2007) ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาสมบัติของสมการอันดับสองที่สามารถลดอันดับได้ นำไปสู่การแก้สมการอันดับหนึ่งด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่า การที่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสอง จะลดรูปไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับหนึ่งได้นั้น ต้องอาศัยเงื่อนไขบางประการ ซึ่งความสลับซับซ้อนของเงื่อนไขดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับรูปแบบของสมการตั้งต้น ดังเห็นได้จากงานของ (Cheb-Terrab, Duarte & Mota, 1998) (Abraham-Shrauner, 2002) และ (Al-Hwawcha & Abid, 2008) ในปี 2003 Martin del Rey และ Muñoz Masqué (Martin del Rey & Muñoz Masqué, 2003) ได้เสนอเงื่อนไขของการลดอันดับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสองในรูปแบบ $y'' = F(x, y, y')$ และในปี 2015 Zraiqat และ Al-Hwawcha (Zraiqat & Al-Hwawcha, 2015) ได้เสนอเงื่อนไขที่จะลดอันดับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสองในรูปแบบ $y'' + p(x, y)y' = G(x, y)$

อย่างไรก็ดีเงื่อนไขในการลดอันดับอาจทำให้การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสองมีความยุ่งยาก เช่น เงื่อนไขที่ประกอบไปด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้น หรือมีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งอาจไม่สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ หรืออาจต้องอาศัยวิธีเชิงตัวเลขเข้าช่วย ซึ่งให้ผลเฉลยที่เป็นค่าประมาณเท่านั้น

งานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงไม่เชิงเส้นอันดับสองที่อยู่ในรูป

$$y'' + p(x, y)y' = G(x, y)$$

สามารถลดรูปมาเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ (Separable Equations) ซึ่งมีวิธีการหาผลเฉลยที่ง่ายและรวดเร็ว โดยไม่ต้องอาศัยวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วย และงานวิจัยนี้สามารถตอบโจทย์การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงไม่เชิงเส้นอันดับสอง ที่มีทั้งตัวแปรต้นและตัวแปรตามอยู่ในสมการ ซึ่งเป็นข้อจำกัดของวิธีการลดอันดับแบบปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

จากการศึกษาลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสองดังสมการ

$$y'' + p\left(x, y\right)y' = G\left(x, y\right) \tag{1}$$

ที่สามารถลดรูปเป็นสมการอันดับหนึ่งแบบแยกตัวแปรได้ พบว่าเงื่อนไขของการลดรูปจะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่าง $p(x, y)$ และ $G(x, y)$ ดังทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2

ทฤษฎีบท 1 ถ้าสมการ $y'' + p(x, y)\, y' = G(x, y)$ สามารถลดรูปเป็นสมการแยกตัวแปรได้แล้ว

$$G_y(x, y) = -p_x(x, y) \tag{2}$$

ทฤษฎีบท 2 ถ้าสมการ $y'' + p(x, y)\, y' = G(x, y)$ สามารถลดรูปเป็นสมการแยกตัวแปรได้แล้ว

$\dfrac{G_y(x, y)}{p(x, y)}$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น และ $\dfrac{p_x(x, y)}{G(x, y)}$ เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น

พิสูจน์ทฤษฎีบท 1

จากสมการแยกตัวแปรได้ซึ่งอยู่ในรูป

$$y' = A(x)\, B(y) \tag{3}$$

ทำการหาอนุพันธ์เทียบ x จะได้ดังสมการ (4)

$$y'' = A(x)\, B'(y)\, y' + B(y)\, A'(x) \tag{4}$$

เมื่อนำสมการ (4) แทนลงในสมการ (1) และจัดรูป จะได้ว่า

$$[A(x)\, B'(y) + p(x, y)]\, y' + [B(y)\, A'(x) - G(x, y)] = 0 \tag{5}$$

จะเห็นได้ว่าถ้า

$$p(x, y) = -A(x)\, B'(y) \tag{6}$$

$$G(x, y) = A'(x)\, B(y) \tag{7}$$

จะทำให้สมการ (5) เป็นจริงได้เช่นกัน

นำสมการ (6) มาหาอนุพันธ์ย่อยเทียบ x จะได้ดังสมการ (8)

$$-p_x(x, y) = A'(x) B'(y) \tag{8}$$

นำสมการ (7) มาหาอนุพันธ์ย่อยเทียบ y จะได้ดังสมการ (9)

$$G_y(x,y) = A'(x)B'(y) \tag{9}$$

จากสมการ (8) และ (9) จะได้ ดังสมการ (2) นั่นคือ

$$G_y(x,y) = -p_x(x,y)$$ □

พิสูจน์ทฤษฎีบท 2

พิจารณาสมการ (6), (7), (8), (9) ที่อยู่ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 1

จากสมการ (9) จัดรูปใหม่เราจะได้

$$B'(y) = \frac{G_y(x,y)}{A'(x)} \tag{10}$$

จากนั้นนำสมการ (10) แทนค่าลงในสมการ (6) และจัดรูปจะได้ดังสมการ (11)

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = -\frac{G_y(x,y)}{p(x,y)} \tag{11}$$

สังเกตว่าสมการทางซ้ายมือของสมการ (11) เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ทำให้ $\frac{G_y(x,y)}{p(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของ x ด้วย

ในทำนองเดียวกันจากสมการ (8) จัดรูปใหม่เราจะได้

$$A'(x) = \frac{-p_x(x,y)}{B'(y)} \tag{12}$$

จากนั้นนำสมการ(12)แทนค่าลงในสมการ (7) และจัดรูปจะได้ดังสมการ (13)

$$\frac{B'(y)}{B(y)} = -\frac{p_x(x,y)}{G(x,y)} \tag{13}$$

สังเกตว่าสมการทางซ้ายมือของสมการ (13) เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น ทำให้ $\frac{p_x(x,y)}{G(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของ y ด้วย □

จากทฤษฎีบท 1 สามารถนำไปใช้ในรูปแบบข้อความแย้งสลับที่ นั่นคือ ถ้า $G_y(x,y) \neq -p_x(x,y)$ แล้วสมการ $y'' + p(x,y)\,y' = G(x,y)$ ไม่สามารถลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ และ จากทฤษฎีบท 2 สามารถนำไปใช้ใน

รูปแบบข้อความแย้งสลับที่ นั่นคือ ถ้า $\dfrac{G_y(x,y)}{p(x,y)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น หรือ $\dfrac{p_x(x,y)}{G(x,y)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น แล้วสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ ไม่สามารถลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> $y'' = 2xy^2 + 5xy^4y'$ จงหาผลเฉลยโดยการลดรูปให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปใหม่ $$y'' - 5xy^4y' = 2xy^2 \tag{14}$$

จะได้ $G(x,y) = 2xy^2$, $p(x,y) = -5xy^4$, $G_y(x,y) = 4xy$, $p_x(x,y) = -5y^4$

ซึ่ง $G_y(x,y) \neq -p_x(x,y)$ จากทฤษฎีบทที่ 1 สรุปได้ว่าสมการนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยการลดรูปให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ □

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $y'' = y^2 + 5xy'$ จงหาผลเฉลยโดยการลดรูปให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปใหม่ $$y'' - 5xy' = y^2 \tag{15}$$

จะได้ $G(x,y) = y^2$, $p(x,y) = -5x$, $G_y(x,y) = 2y$, $p_x = -5$

จะได้ $\dfrac{G_y(x,y)}{p(x,y)} = -\dfrac{2y}{5x}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าไม่เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น จากทฤษฎีบท 2 สรุปได้ว่าสมการนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยการลดรูปให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ □

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ว่าถ้า $G_y(x,y) \neq -p_x(x,y)$ แล้วสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ จะไม่สามารถลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปร แต่ถ้า $G_y(x,y) = -p_x(x,y)$ แล้วสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ อาจจะลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้หรือไม่ก็ได้ ดังนั้นในทางปฏิบัติ จะสมมติให้สมการอันดับสองนี้สามารถลดรูปเป็น $y' = A(x)B(y)$ โดยที่ $A(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เพียงอย่างเดียว และ $B(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y เพียงอย่างเดียว จากนั้นทดลองหา $A(x)$ และ $B(y)$ ที่เหมาะสมโดยอาศัยทฤษฎีบท 2 ดังกระบวนการต่อไปนี้

การหา $A(x)$ และ $B(y)$

สมมติให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1) เป็นสมการที่สามารถลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ $\dfrac{G_y(x,y)}{p(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น และ $\dfrac{p_x(x,y)}{G(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น จึงทำให้สมการ (11) และ (13) เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้เช่นกัน เราจึงทำการแก้สมการ (11) และ (13) เพื่อหาค่าของ $A(x)$ และ $B(y)$ โดยแบ่งเป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

<u>กรณีที่ 1</u> หาค่าของ $A(x)$ ก่อน

จากสมการ (11) อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

จะได้
$$\int \frac{1}{A(x)}dA = \int -\frac{G_y(x,y)}{p(x,y)}dx$$

$$\ln A(x) = \int -\frac{G_y(x,y)}{p(x,y)}dx + c$$

$$A(x) = c_1 e^{\int -\frac{G_y(x,y)}{p(x,y)}dx} \quad (16)$$

เมื่อ c และ $c_1 = e^c$ เป็นค่าคงที่

นำสมการ (16) มาหาอนุพันธ์เทียบ x แล้วนำไปแทนในสมการ (7) เพื่อหาค่า $B(y)$ จากสมการ

$$B(y) = \frac{G(x,y)}{A'(x)} \quad (17)$$

<u>กรณีที่ 2</u> หาค่าของ $B(y)$ ก่อน จาก สมการ (13) อินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

จะได้
$$\int \frac{1}{B(y)}dB = \int -\frac{p_x(x,y)}{G(x,y)}dy$$

$$\ln B(y) = \int -\frac{p_x(x,y)}{G(x,y)}dy + c$$

$$B(y) = c_2 e^{\int -\frac{p_x(x,y)}{G(x,y)}dy} \quad (18)$$

เมื่อ c และ $c_2 = e^c$ เป็นค่าคงที่

นำสมการ (18) มาหาอนุพันธ์เทียบ y แล้วนำไปแทนในสมการ (6) เพื่อหาค่า $A(x)$ จากสมการ

$$A(x) = -\frac{p(x,y)}{B'(y)} \quad (19)$$

จากทั้งสองกรณีทำให้เกิดสูตรสำหรับการหาค่า $A(x)$ และ $B(y)$ ดังสมการ (16) - (17) และ (18) - (19) จากนั้นทำการหาผลเฉลยของสมการ $y' = A(x)B(y)$ แล้วนำผลเฉลยที่ได้ไปตรวจสอบว่าเป็นผลเฉลยของสมการ

$y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ ด้วยหรือไม่ ถ้าตรวจสอบแล้วพบว่า ผลเฉลยของสมการ $y' = A(x)B(y)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ แล้วเรากล่าวได้ว่าสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3 $y'' = \dfrac{(2xy - 2y)y' - y^2}{(x-1)^2}$ โดยที่ $x > 1$ จงหาผลเฉลยโดยการลดรูปให้เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้

วิธีทำ จัดรูปใหม่

$$y'' - \frac{2yy'}{(x-1)} = -\frac{y^2}{(x-1)^2} \tag{20}$$

จากโจทย์จะได้ว่า

$$G(x,y) = -\frac{y^2}{(x-1)^2}, \quad p(x,y) = -\frac{2y}{(x-1)}, \quad G_y(x,y) = -\frac{2y}{(x-1)^2}, \quad p_x(x,y) = \frac{2y}{(x-1)^2}$$

ซึ่ง $G_y(x,y) = -p_x(x,y)$

ลองหา $A(x)$ และ $B(y)$ ดังนี้

กรณีที่ 1 หาค่าของ $A(x)$ จาก

$$A(x) = c_1 e^{\int -\frac{G_y(x,y)}{p(x,y)}dx}$$

จะได้

$$A(x) = c_1 e^{\int -\frac{1}{(x-1)}dx}$$

$$A(x) = \frac{c_1}{x-1} \tag{21}$$

หาค่าของ $B(y)$ โดยนำสมการ (21) หาอนุพันธ์เทียบ x จะได้ $A'(x) = -\dfrac{c_1}{(x-1)^2}$

จาก

$$B(y) = \frac{G(x,y)}{A'(x)}$$

จะได้

$$B(y) = \left(\frac{y^2}{(x-1)^2}\right)\frac{(x-1)^2}{c_1}$$

$$B(y) = c_2 y^2 \tag{22}$$

เมื่อ $c_2 = \dfrac{1}{c_1}$ เป็นค่าคงที่ นั่นคือ จากกรณีที่ 1 สามารถลดรูปเป็น $y' = y^2(\dfrac{1}{x-1})$

<u>กรณีที่ 2</u> หาค่าของ $B(y)$ จาก $$B(y) = c_2 e^{\int -\frac{p_x(x,y)}{G(x,y)}dy}$$

จะได้ $$B(y) = c_2 e^{\int \left(\frac{2y}{(x-1)^2}\right)\left(\frac{(x-1)^2}{y^2}\right)dy}$$

$$B(y) = c_2 y^2 \tag{23}$$

หาค่าของ $A(x)$ โดยนำสมการ (23) หาอนุพันธ์เทียบ y จะได้ $B'(y) = c_2 2y$

จาก $$A(x) = \frac{-p(x,y)}{B'(y)}$$

จะได้ $$A(x) = \left(\frac{2y}{(x-1)}\right)\left(\frac{1}{c_2 2y}\right)$$

$$A(x) = \frac{c_1}{(x-1)} \tag{24}$$

เมื่อ $c_1 = \frac{1}{c_2}$ เป็นค่าคงที่ นั่นคือ จากกรณีที่ 2 สามารถลดรูปเป็น

$$y' = y^2\left(\frac{1}{x-1}\right) \tag{25}$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่าทั้งสองกรณีสามารถลดรูปได้เป็นสมการเดียวกัน คือ $y' = y^2(\frac{1}{x-1})$ ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้

นำสมการ (25) มาหาผลเฉลยได้เป็น $$y = \frac{-1}{\ln(x-1)+c} \tag{26}$$

นำผลเฉลยนี้ไปทดสอบว่าเป็นผลเฉลยของสมการ (20) หรือไม่ดังนี้

จากสมการ (26) จะได้

$$y' = \frac{1}{[\ln(x-1)+c]^2(x-1)} \tag{27}$$

$$y'' = \frac{-2}{[\ln(x-1)+c]^3(x-1)^2} - \frac{1}{[\ln(x-1)+c]^2(x-1)^2} \tag{28}$$

นำสมการ (26) ,(27) และ (28) แทนลงในสมการ (20) จะได้

$$y'' - \frac{2yy'}{(x-1)} = \frac{-2}{[\ln(x-1)+c]^3(x-1)^2} - \frac{1}{[\ln(x-1)+c]^2(x-1)^2} - 2\frac{-1}{[\ln(x-1)+c]}\frac{1}{[\ln(x-1)+c]^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2-[\ln(x-1)+c]+2}{[\ln(x-1)+c]^3(x-1)^2}$$

$$= \frac{-1}{[\ln(x-1)+c]^2(x-1)^2}$$

$$= -\frac{y^2}{(x-1)^2}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $y = \dfrac{-1}{\ln(x-1)+c}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น $y'' = \dfrac{(2xy-2y)y' - y^2}{(x-1)^2}$

$\square$

สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษาลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นอันดับสองดังสมการ (1) ที่สามารถลดรูปเป็นสมการอันดับหนึ่งแบบแยกตัวแปรได้ พบว่าเงื่อนไขของการลดรูปจะขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ระหว่าง $p(x,y)$ และ $G(x,y)$ ดังทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 ซึ่งจากทฤษฎีบท 1 สามารถนำไปใช้ในรูปแบบข้อความแย้งสลับที่ นั่นคือ ถ้า $G_y(x,y) \neq -p_x(x,y)$ แล้วสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ ไม่สามารถลดรูปเป็นสมการแยกตัวแปรได้ และจากทฤษฎีบท 2 สามารถนำไปใช้ในรูปแบบข้อความแย้งสลับที่ นั่นคือ ถ้า $\dfrac{G_y(x,y)}{p(x,y)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น หรือ $\dfrac{p_x(x,y)}{G(x,y)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น แล้วสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ ไม่สามารถลดรูปเป็นสมการแยกตัวแปรได้

จากทฤษฎีบท 1 ถ้า $G_y(x,y) = -p_x(x,y)$ แล้วสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ อาจจะลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้หรือไม่ก็ได้ ดังนั้นในทางปฏิบัติ จะสมมติให้สมการอันดับสองสามารถลดรูปเป็น $y' = A(x)B(y)$ โดยที่ $A(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เพียงอย่างเดียว และ $B(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y เพียงอย่างเดียว จากนั้นทดลองหา $A(x)$ และ $B(y)$ ที่เหมาะสมโดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 2 จากนั้นทำการหาผลเฉลยของสมการ $y' = A(x)B(y)$ แล้วนำผลเฉลยที่ได้ไปตรวจสอบว่าเป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ ด้วยหรือไม่ ถ้าตรวจสอบแล้วพบว่า ผลเฉลยของสมการ $y' = A(x)B(y)$ เป็นผลเฉลยของ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ แล้วเรากล่าวได้ว่าสมการ $y'' + p(x,y)y' = G(x,y)$ สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีลดรูปเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ ซึ่งกระบวนการที่ได้นี้สามารถนำมาใช้ช่วยในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสองอีกทางหนึ่งได้ นอกจากนี้ยังเป็นจุดเริ่มต้นสำคัญในการพัฒนากระบวนการไปสู่การลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นอันดับสองไปเป็นสมการอันดับหนึ่งในรูปแบบอื่น ๆ เช่น สมการเอกพันธ์ หรือสมการแบร์นูลลีต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา ผู้เขียนขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้ อีกทั้งขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่ช่วยให้คำแนะนำ เพื่อนำมาใช้ปรับปรุงและพัฒนางานวิจัยนี้ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

Satravaha, P. (2007). *Differential Equations*. Bangkok: Pithak Printing.

Cheb-Terrab, E. S., Duarte, L. G. S., Mota, L.A.C.P. (1998). Computer algebra solving of second order ODEs using symmetry methods. *Computer Physics Communications*, *108*, 90-114

Abraham-Shrauner, B. (2002). Hidden Symmetries, First Integrals and Reduction of Order of Nonlinear Ordinary Differential Equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 9*(2), 1-9

Martin del Rey, A., Muñoz Masqué, J. (2003). Reducing $y'' = F(x, y, y')$ to first order. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 155*(2), 389-404.

Al-Hwawcha, L.K. and Abid, N.A. (2008). A New Approach for Solving Second Order Ordinary Differential Equations. *Journal of Mathematics and Statistics, 4*, 58-59. http://dx.doi.org/10.3844/jmssp.2008.58.59

Zraiqat, A. Al-Hwawcha, L. K. (2015). On Exact Solutions of Second Order Nonlinear Ordinary Differential Equations. *Applied Mathematics, 6*, 953-957.